Taylor 展開の利用法

久島広幸 (h2@hisasima.jp)

2018/1/4

Taylor 展開をひと通り学んだあとは，まずこの形を記憶しておくのが有用である．ずれをあらわす量 Δu の冪乗で表現されるので覚えやすい：

$$f(u+\Delta u)=f(u)+f'(u)\Delta u+\frac{f^{(2)}(u)}{2!}(\Delta u)^2+\frac{f^{(3)}(u)}{3!}(\Delta u)^3+\cdots=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(u)}{n!}(\Delta u)^n\,. \tag{1}$$

次に $x:=u+\Delta u$ (i.e. $\Delta u=x-u$) とすれば，u の周りの Taylor 展開の基本形が得られる：

$$f(x)=f(u)+f'(u)(x-u)+\frac{f^{(2)}(u)}{2!}(x-u)^2+\frac{f^{(3)}(u)}{3!}(x-u)^3+\cdots=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(u)}{n!}(x-u)^n\,. \tag{2}$$

そして $u=0$ とすれば，Maclaurin 展開が得られる：

$$f(x)=f(0)+f'(0)x+\frac{f^{(2)}(0)}{2!}x^2+\frac{f^{(3)}(0)}{3!}x^3+\cdots=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n\,. \tag{3}$$

(1) に戻り，２次以上の項をまとめると（Landau の記号を使う）

$$f(u+\Delta u)=f(u)+f'(u)\Delta u+O\left((\Delta u)^2\right)$$

とあらわされる．２次以上の項をネグルと

$$\begin{aligned} f(u+\Delta u)\simeq f(u)+f'(u)\Delta u \quad &\Longleftrightarrow \quad f(u+\Delta u)-f(u)\simeq f'(u)\Delta u \\ &\Longleftrightarrow \quad \frac{f(u+\Delta u)-f(u)}{\Delta u}\simeq f'(u) \end{aligned}$$

２次以上の項をネグルということを「微分である」と捉える [1]．すなわち，$\Delta\mapsto d$ とすれば $(\simeq)\mapsto(=)$ となって

$$\begin{aligned} f(u+du)=f(u)+f'(u)du \quad &\Longleftrightarrow \quad f(u+du)-f(u)=f'(u)du \\ &\Longleftrightarrow \quad \frac{f(u+du)-f(u)}{du}=f'(u) \end{aligned}$$

となる．これは導関数そのものである．

さらに (2) においても２次以上の項をネグレば

$$\frac{f(x)-f(u)}{x-u}\simeq f'(u)$$

[1] なので，物理屋はいつもなんの躊躇もなく２次以上の項を無視する，という論を立てるのだろうと思ったりもする．

となる．この形式で２次以上の項をネグルということを「$\lim_{x\to u}$」と捉えると，微分係数になる．すなわち

$$\frac{f(x)-f(u)}{x-u} \simeq f'(u) \quad \Longrightarrow \quad \lim_{x\to u}\frac{f(x)-f(u)}{x-u} = f'(u) = \left.\frac{df(x)}{dx}\right|_{x=u} .$$

そもそも Taylor 展開は，まず微分概念とそれに基づく導関数というものを土台にしたのちに，導出されるものであった．しかしながら，上記の筋道はその逆で，Taylor 展開の形式を先に認めて，そこから導関数や微分係数を導くという道を辿っている．とはいえ，Taylor 展開の形式においてすでに導関数を使っているので，循環した論法になってしまっているところがご愛敬ではある．

としてもである．先に微分，導関数，Taylor 展開というものの正当な道筋をきちんと学習したあとであれば,「２次以上の項をネグル」ことにより，上記のような思考経済を適用しても，ま，いいのではないか，と考えている [2].

[2] 似たような「思考経済」を働かせる局面として，遠心力がある．非慣性系を慣性系から眺めてあたかも「力の釣り合い」があるかのように見せる，あの遠心力である．自然界にはそのような力はないのに，非慣性系を学習したあとであれば，遠心力は便利な概念である．